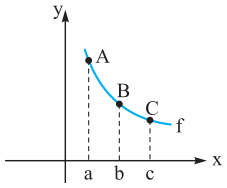
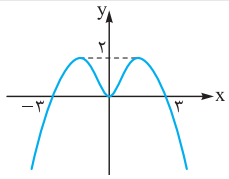
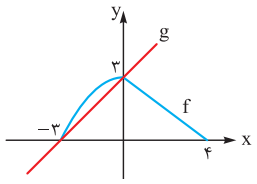
۱۸ آزمون	ریاضی (۳)	رشته: علوم تجربی	خیلی سبز!
	◀ نوبت دوم ▶	پایهٔ دوازدهم	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه

ردیف		نمره
۱	درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. الف) اگر $k > 0$ باشد بازهٔ $(a, a+k)$ یک همسایگی چپ عدد a نامیده می‌شود. ب) اگر $(fog)(x) = x^2$ و $f(x) = \sqrt{x}$ باشند تابع g برابر با $g(x) = x^4$ است. پ) با توجه به نمودار مقابل می‌توان گفت: $f'(c) > f'(b) > f'(a)$ 	۰/۷۵
۲	جاهای خالی را با عبارت مناسب پُر کنید. الف) سطح مقطع حاصل از برخورد یک صفحه با یک کره، نقطه یا ..... است. ب) تابع $f(x) = -6x^3 - 2x$ روی $\mathbb{R}$ اکیداً ..... است. پ) اگر دورهٔ تناوب تابع $f(x) = 5\cos(kx - \frac{\pi}{6})$ برابر با 4π باشد، مقدار k^2 برابر با ..... است.	۰/۷۵
۳	گزینهٔ درست را انتخاب کنید. الف) اگر $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ باشد آن‌گاه مقدار $\tan\alpha$ در بازهٔ ..... قرار دارد. ۱) $(0, +\infty)$ ۲) $(-\infty, 0)$ ۳) $(-1, 1)$ ۴) $(-\infty, +\infty)$ ب) تابع $y = \frac{1}{x}$ در دامنهٔ خود، روی هم چند نقطهٔ اکسترمم نسبی دارد؟ ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ پ) در یک بیضی با طول قطرهای ۸ و ۶ خروج از مرکز چه‌قدر است؟ ۱) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ۲) $\sqrt{6}$ ۳) $\sqrt{7}$ ۴) $\frac{\sqrt{7}}{4}$	۱/۵
۴	اگر نمودار تابع $f(x)$ به صورت روبه‌رو باشد نمودار تابع $y = -3f(-\frac{x}{2}) + 2$ را به کمک آن رسم کنید. 	۱/۵
۵	ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = 3^{x-1} + 2$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۶	معادلهٔ مثلثاتی مقابل را حل کنید. $\sin 2x + \cos x = 0$	۱/۵
۷	مقادیر a و b را چنان بیابید که چندجمله‌ای $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2bx - 3$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $(x-2)$ برابر با ۴ باشد.	۱/۲۵
۸	حاصل حد مقابل را به دست آورید. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(2x-1)^3 - 6x^3 + 4x - 1}{10x^2 - 18x^3 - 2}$	۰/۷۵
۹	با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x\|x^2 - 3x\|$ را در نقطهٔ $x = 3$ در صورت وجود به دست آورید.	۱/۵
۱۰	گنجایش ظرفی ۱۰۰ لیتر است. در لحظهٔ $t = 0$ سوراخی در این ظرف ایجاد می‌کنیم. اگر حجم مایع باقی‌مانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V = 100(1 - \frac{t}{120})^2$ محاسبه شود در چه زمانی، آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم مایع برابر با آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[0, 120]$ است؟	۱/۵
۱۱	با توجه به نمودارهای f و g حاصل $(\frac{f}{g})'(2)$ را به دست آورید. 	۱/۷۵
۱۲	تابعی مانند f با دامنهٔ $\mathbb{R}$ مثال بزنید به طوری که هر نقطهٔ دلخواه از D_f یک نقطهٔ بحرانی f باشد. مسئله چند جواب دارد؟	۰/۷۵
۱۳	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = x + \frac{9}{x+3}$ را در بازهٔ $[-2, 2]$ به دست آورید.	۱/۷۵
۱۴	مخروط قائمی به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۸ واحد را با صفحه‌ای موازی قاعده و به فاصلهٔ ۶ واحدی از قاعدهٔ آن قطع می‌دهیم. مساحت سطح مقطع صفحه و مخروط را به دست آورید.	۱
۱۵	مشخص کنید دو دایرهٔ $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$ و $x^2 + (y-5)^2 = 2$ نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟ $(\sqrt{68} \simeq 8/2)$	۱/۵
۱۶	دو کیسه داریم. در اولی ۶ مهرهٔ سفید و ۳ مهرهٔ سیاه و در دومی ۵ مهرهٔ سفید و ۴ مهرهٔ سیاه است. دو تاس را پرتاب می‌کنیم اگر تاس‌ها یکسان ظاهر شوند از کیسهٔ اول و در غیر این صورت از کیسهٔ دوم مهره‌ای برمی‌داریم. احتمال سفیدبودن این مهره چه‌قدر است؟	۱/۵
	موفق باشید — جمع نمرات	۲۰

آزمون شمارهٔ ۱۸ (نوبت دوم)

۱ الف) نادرست (۰/۲۵) (فصل ۳ ـ مفهوم همسایگی)

بازهٔ $(a, a+k)$ یک همسایگی راست عدد a است. $(k>0)$

ب) درست (۰/۲۵) (فصل ۱ ـ ترکیب توابع)

$$(fog)(x)=x^2 \Rightarrow f(g(x))=x^2 \Rightarrow \sqrt{g(x)}=x^2$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} g(x)=x^4$$

پ) درست (۰/۲۵) (فصل ۴ ـ رابطهٔ شیب مماس و مشتق)

با توجه به شکل، شیب خطوط مماس بر نمودار f در نقاط a، b و c همگی منفی هستند و رابطهٔ $f'(c)>f'(b)>f'(a)$ درست است.

۲ الف) دایره (۰/۲۵) (فصل ۶ ـ مقاطع مخروطی)

بچه‌های عزیز، تجسم فضایی در فصل ۶ بسیار مهم است حتماً درسنامهٔ آخر این کتاب را برای فهم بهتر تجسم فضایی مطالعه کنید.

ب) نزولی (۰/۲۵) (فصل ۵ ـ رابطهٔ یکنوایی و مشتق)

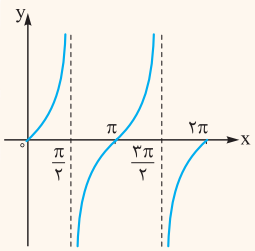
$$f(x)=-6x^3-2x \Rightarrow f'(x)=-18x^2-2<0$$

پ) $\frac{1}{4}$ (۰/۲۵) (فصل ۲ ـ تناوب و تانژانت)

$$T=\frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 4\pi=\frac{2\pi}{|k|} \Rightarrow |k|=\frac{1}{2} \Rightarrow k^2=\frac{1}{4}$$

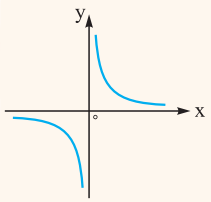
۳ الف) گزینهٔ «۲» (۰/۵) (فصل ۲ ـ تناوب و تانژانت)

اگر زاویهٔ α بین $\frac{3\pi}{2}$ و 2π تغییر کند تانژانت آن بین $-\infty$ و صفر تغییر خواهد کرد.



ب) گزینهٔ «۱» (۰/۵) (فصل ۵ ـ اکسترمم‌های نسبی و مطلق)

با توجه به نمودار مقابل، تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنهٔ خود یعنی $\mathbb{R}-\{0\}$ هیچ اکسترمم نسبی و مطلقی ندارد.

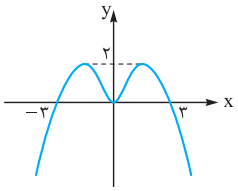


پ) گزینهٔ «۴» (۰/۵) (فصل ۶ ـ خروج از مرکز بیضی)

$$\begin{cases}2a=8 \Rightarrow a=4\\ 2b=6 \Rightarrow b=3\end{cases} \Rightarrow c^2=a^2-b^2=16-9=7$$

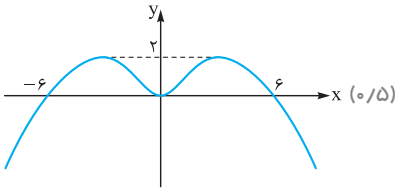
$$\Rightarrow c=\sqrt{7} \Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

۴



طول نقاط در (-2) ضرب می‌شود.

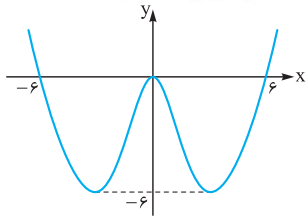
$$y=f(-\frac{x}{2})$$



(۰/۵)

عرض نقاط در (-3) ضرب می‌شود.

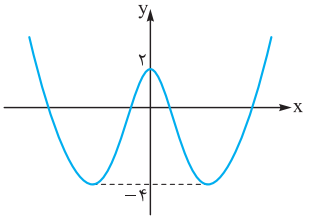
$$y=-3f(-\frac{x}{2})$$



(۰/۵)

کل نمودار را ۲ واحد به بالا حرکت می‌دهیم.

$$y=-3f(-\frac{x}{2})+2$$



(۰/۵)

(فصل ۱ ـ تبدیل نمودار توابع)

۵

$$y=3^{x-1}+2 \Rightarrow 3^{x-1}=y-2$$

$$\xrightarrow[\text{در مبنای ۳ می‌گیریم}]{\text{از دو طرف، لگاریتم}} \log_3 3^{x-1}=\log_3(y-2) \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow x-1=\log_3(y-2) \Rightarrow x=\log_3(y-2)+1 \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\log_3(x-2)+1 \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۱ ـ تابع وارون)

۶ از فرمول $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ استفاده کرده سپس فاکتورگیری می‌کنیم:

$$\underbrace{2\sin x\cos x+\cos x}_{\text{فاکتور از }\cos x}=0 \ (۰/۲۵) \Rightarrow \cos x(2\sin x+1)=0 \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0 \Rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{2} \ (۰/۲۵) & (k\in\mathbb{Z})\\ 2\sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin(-\frac{\pi}{6}) \ (۰/۲۵) & \\ \Rightarrow \begin{cases}x=2k\pi-\frac{\pi}{6} \ (۰/۲۵)\\ x=2k\pi+\pi+\frac{\pi}{6} \ (۰/۲۵)\end{cases} & (k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

(فصل ۲ ـ معادلات مثلثاتی)

۷ $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است، پس $f(-1)$ برابر با صفر است:

$$f(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3-a(-1)^2+2b(-1)-3=0$$

$$\Rightarrow -2-a-2b-3=0 \Rightarrow a+2b=-5 \quad (۰/۲۵)$$

از طرفی باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ برابر با ۴ است، یعنی $f(2)=4$:

$$f(2)=4 \Rightarrow 2(2)^3-a(2)^2+2b(2)-3=4$$

$$\Rightarrow 16-4a+4b-3=4 \Rightarrow -4a+4b=-9 \quad (۰/۲۵)$$

$$\times 4\begin{cases}a+2b=-5\\ -4a+4b=-9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4a+8b=-20\\ -4a+4b=-9\end{cases} \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow 12b=-29 \Rightarrow b=-\frac{29}{12} \ (۰/۲۵) \Rightarrow a=-\frac{1}{6} \ (۰/۲۵)$$

(فصل ۳ ـ تکمیل و یادآوری (بخش‌پذیری))

۸ چون x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند باید از چندجمله‌ای‌های صورت و مخرج، جملات پُرتوان را انتخاب کرده و بقیهٔ جملات را حذف کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-1)^3-6x^3+4x-1}{10x^2-18x^3-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)^3-6x^3}{-18x^3} \quad (۰/۲۵)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8x^3-6x^3}{-18x^3}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{-18x^3}}_{(۰/۲۵)}=-\frac{2}{18}=-\frac{1}{9} \quad (۰/۲۵)$$

(فصل ۳ ـ حد در بی‌نهایت)

۹ تعریف مشتق f در نقطهٔ $x=a$: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x|x^2-3x|-0}{x-3}$$ (۰/۲۵)

حالا حد چپ و راست را حساب می‌کنیم (چون $x=3$ ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق است.):

مشتق راست: $f'_+(3)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x(x^2-3x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2(x-3)}{x-3}$ (۰/۲۵)

$$\lim_{x\to 3^+}x^2=9$$ (۰/۲۵)

مشتق چپ: $f'_-(3)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x(x^2-3x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{-x^2(x-3)}{x-3}$ (۰/۲۵)

$$\lim_{x\to 3^-}(-x^2)=-9$$ (۰/۲۵)

مشتق چپ و راست با هم مساوی نشدند، پس تابع f در $x=3$ مشتق‌پذیر نیست. (۰/۲۵)

(فصل ۴ ـ مشتق‌پذیری و پیوستگی)

۱۰ $V(0)=100\ ,\ V(120)=0 \Rightarrow \bar{V}=\dfrac{V(120)-V(0)}{120-0}$ (۰/۲۵)

$=\dfrac{0-100}{120}=-\dfrac{5}{6}$ آهنگ متوسط (۰/۲۵)

حالا آهنگ لحظه‌ای یعنی همان مشتق را حساب می‌کنیم:

$$V'(t)=100\times 2\times(-\frac{1}{120})(1-\frac{t}{120})=-\frac{5}{3}(1-\frac{t}{120})$$ (۰/۵)

آهنگ متوسط و آهنگ لحظه‌ای را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\Rightarrow \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{3}}}(1-\frac{t}{120})=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{2}{\cancel{6}}}$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow 1-\dfrac{t}{120}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{t}{120}=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow t=60$ (ثانیه) (۰/۲۵)

(فصل ۴ ـ آهنگ متوسط و لحظه‌ای)

۱۱ ابتدا ضابطهٔ تابع g را به دست می‌آوریم:

$$(A\left|\begin{matrix}-3\\0\end{matrix}\right.,B\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.) \Rightarrow m=\frac{3-0}{0-(-3)}=1$$

$y-0=1(x+3) \Rightarrow y=x+3 \Rightarrow g(x)=x+3$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow g'(x)=1$ (۰/۲۵)

حالا ضابطهٔ قسمت خطی f را به دست می‌آوریم (قسمت منحنی f کاربردی در حل این سؤال ندارد.):

$$(B\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.,C\left|\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right.) \Rightarrow m=\frac{0-3}{4-0}=-\frac{3}{4}$$

$y-3=-\dfrac{3}{4}(x-0) \Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}x+3$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow f(x)=-\dfrac{3}{4}x+3 \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{4}$ (۰/۲۵)

$$(\frac{f}{g})'(2)=\frac{f'(2)g(2)-g'(2)f(2)}{(g(2))^2}$$ (۰/۲۵) $=\dfrac{(-\frac{3}{4})(5)-(1)\times(\frac{3}{2})}{5^2}$

$=\dfrac{-\frac{15}{4}-\frac{3}{2}}{25}$ (۰/۲۵) $=\dfrac{-\frac{21}{4}}{\frac{25}{1}}=-\dfrac{21}{100}=-0/21$ (۰/۲۵)

(فصل ۴ ـ فرمول‌های مشتق)

۱۲

نکته

اگر $x=a$ نقطهٔ بحرانی تابع f باشد $f'(a)$ یا صفر است یا وجود ندارد.

اگر تابع f ثابت باشد مشتق آن در هر نقطه، برابر صفر است یعنی هر نقطه از دامنه‌اش، بحرانی محسوب می‌شود، مثل تابع $f(x)=3$ (۰/۲۵). این مسئله بی‌شمار جواب دارد. (۰/۵)

(فصل ۵ ـ نقاط بحرانی)

۱۳

$$f'(x)=1+\frac{-9}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x}{(x+3)^2}=0$$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^2+6x=0$

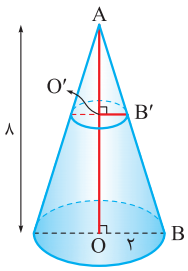
$$\Rightarrow \underbrace{x(x+6)=0}_{(0/25)} \Rightarrow \begin{cases} x=0\in[-2,2] & \checkmark\ (0/25) \\ x=-6\notin[-2,2] & \times\ (0/25) \end{cases}$$

پس نقاط بحرانی f عبارت‌اند از: $x=0$ ، $x=-2$ و $x=2$. حالا مقدار f در این نقاط را محاسبه کرده و با هم مقایسه می‌کنیم تا اکسترمم‌های مطلق به دست آیند:

$$\begin{cases} f(0)=0+\dfrac{9}{0+3}=3 \Rightarrow \text{مینیمم مطلق} & (0/25) \\ f(-2)=-2+\dfrac{9}{-2+3}=-2+9=7 \Rightarrow \text{ماکزیمم مطلق} & (0/25) \\ f(2)=2+\dfrac{9}{2+3}=2+\dfrac{9}{5}=\dfrac{19}{5} & (0/25) \end{cases}$$

(فصل ۵ ـ اکسترمم‌های مطلق)

۱۴ بهتر است یک شکل فرضی برای مسئله رسم کنیم. سطح مقطع مورد نظر، یک دایره است که باید شعاع آن را به کمک قضیهٔ تالس به دست آوریم:



در مثلث AOB پاره‌خط‌های $O'B'$ و OB با هم موازی‌اند، لذا طبق تالس داریم:

$$\frac{O'B'}{OB}=\frac{AO'}{AO} \Rightarrow \frac{O'B'}{2}=\frac{2}{8}$$ (۰/۵)

$\Rightarrow O'B'=\dfrac{2\times 2}{8}=\dfrac{1}{2}$ شعاع دایرهٔ کوچک (۰/۲۵)

$=\pi(\frac{1}{2})^2=\dfrac{\pi}{4}$ مساحت دایرهٔ کوچک (سطح مقطع صفحه و مخروط) (۰/۲۵)

(فصل ۶ ـ مقاطع مخروطی)

۱۵ ابتدا مرکز و شعاع هر دایره را به دست می‌آوریم:

$$(x-2)^2+(y+3)^2=4 \Rightarrow O\left|\begin{matrix}2\\-3\end{matrix}\right.$$ (۰/۲۵) , $r^2=4 \Rightarrow r=2$ (۰/۲۵)

$$x^2+(y-5)^2=2 \Rightarrow O'\left|\begin{matrix}0\\5\end{matrix}\right.$$ (۰/۲۵) , $r'^2=2 \Rightarrow r'=\sqrt{2}\simeq 1/4$ (۰/۲۵)

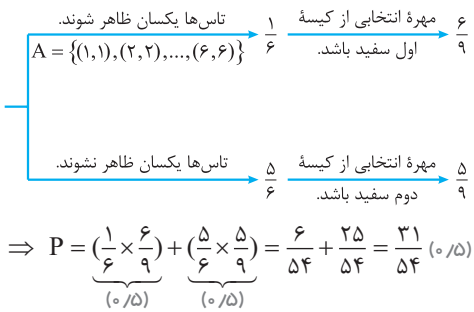
حالا اندازهٔ خط‌المرکزین یعنی پاره‌خط OO' را محاسبه می‌کنیم:

$$d=OO'=\sqrt{(2-0)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{4+64}=\sqrt{68}\simeq 8/2$$ (۰/۲۵)

واضح است که $d>r+r'$ است پس دو دایره، متخارج (بیرون هم) می‌باشند. (۰/۲۵)

(فصل ۶ ـ وضعیت دو دایره نسبت به هم)

۱۶ از روش شاخه‌بندی (نمودار درختی) استفاده می‌کنیم:



$$\Rightarrow P=\underbrace{(\frac{1}{6}\times\frac{6}{9})}_{(0/5)}+\underbrace{(\frac{5}{6}\times\frac{5}{9})}_{(0/5)}=\frac{6}{54}+\frac{25}{54}=\frac{31}{54}$$ (۰/۵)

(فصل ۷ ـ قانون احتمال کل)